Πανελλήνιες 2022

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

έτσι μαθαίνω

Θέμα Α 1

Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν F είναι μια παράγουσα της f στο Δ, τότε να αποδείξετε ότι:

- όλες οι συναρτήσεις της μορφής $G(x) = F(x) + c$, όπου $c \in \mathbb{R}$, είναι παράγουσες της f στο Δ και
- κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει τη μορφή $G(x) = F(x) + c$, με $c \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 7

σελ 186

- Κάθε συνάρτηση της μορφής $G(x) = F(x) + c$, όπου $c \in \mathbb{R}$, είναι μια παράγουσα της f στο Δ, αφού

$$G'(x) = (F(x) + c)' = F'(x) = f(x), \text{ για κάθε } x \in \Delta.$$

- Έστω G είναι μια άλλη παράγουσα της f στο Δ. Τότε για κάθε $x \in \Delta$ ισχύουν $F'(x) = f(x)$ και $G'(x) = f(x)$, οπότε

$$G'(x) = F'(x), \text{ για κάθε } x \in \Delta.$$

Άρα, σύμφωνα με το πόρισμα της § 2.6, υπάρχει σταθερά c τέτοια, ώστε

$$G(x) = F(x) + c, \text{ για κάθε } x \in \Delta. \blacksquare$$

Θέμα Α 2

Να διατυπώσετε το θεώρημα του Fermat.

Μονάδες 4

σελ 142

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ και x_0 ένα **εσωτερικό** σημείο του Δ. Αν η f παρουσιάζει **τοπικό ακρότατο** στο x_0 και είναι **παραγωγίσιμη** στο σημείο αυτό, τότε:

$$f'(x_0) = 0$$

Θέμα Α 3

Πότε η ευθεία $x = x_0$ λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f ;

Μονάδες 4

σελ 161

Αν ένα τουλάχιστον από τα όρια $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$, $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$ είναι $+\infty$ ή $-\infty$, τότε η ευθεία $x = x_0$ λέγεται **κατακόρυφη ασύμπτωτη** της γραφικής παράστασης της f.

Θέμα Α 4

Μονάδες 10

α) Αν $0 < α < 1$ $τότε$ $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = 0$

Σωστό

β) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0,1]$, παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ και $f'(x) \neq 0$, για όλα τα $x \in (0,1)$, τότε $f(0) \neq f(1)$

Σωστό

γ) Η συνάρτηση $f(x) = σφx$ $είναι$ $παραγωγίσιμη$ $στο$ $R_2 = \mathbb{R} - \{x|ημχ = 0\}$ και ισχύει $f'(x) = -\dfrac{1}{ημ^2x}$

Σωστό

δ) Ισχύει ότι $\lim\limits_{χ\to0} \dfrac{1-συνχ}{χ} = 1$

Λάθος

ε) Αν $\int_α^β f(x)\,dx \geq 0$, τότε κατ΄ανάγκη θα είναι $f(x) \geq 0$, για κάθε $x \in [α, β]$.

Λάθος

Θέμα Β 1

Δίνεται η συνάρτηση $f : (-\infty, 1] \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$ και η συνάρτηση $g : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με τύπο $g(x) = \sqrt{x}$.

Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $h = fog$.

Μονάδες 6

Πρέπει $\begin{cases} x \in A_g \\ g(x) \in A_f \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ \sqrt{x} \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x \leq 1 \end{cases}$ Άρα $A_{fog} = [0, 1]$

$$h(x) = (fog)(x) = f\big(g(x)\big) = f(\sqrt{x}) =$$

$$= (\sqrt{x})^4 - 2(\sqrt{x})^2 + 1 = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2, \quad \text{με } A_h = [0, 1]$$

Θέμα Β 2

Αν $h(x) = (x-1)^2, x \in [0,1]$, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση h είναι "1 - 1" (μονάδες 3) και να βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση h^{-1} της h (μονάδες 6).

Μονάδες 9

Η h είναι παραγωγίσιμη με $h'(x) = 2(x-1)(x-1)' \Rightarrow h'(x) = 2(x-1)$

$h'(x) \leq 0$ με την ισότητα να ισχύει για $x = 1$. Η h συνεχής άρα $h \searrow$ στο $[0,1]$

Οπότε η h είναι "1 - 1" άρα αντιστρέψιμη.

$A_{h^{-1}} = h(A) = h([0,1]) = [h(1), h(0)] = [0,1]$

Θέτουμε $h(x) = y \Leftrightarrow (x-1)^2 = y \Leftrightarrow |x-1| = \sqrt{y}$ Το $x-1 \leq 0$ για κάθε $x \in [0,1]$

$$\Leftrightarrow -(x-1) = \sqrt{y} \Leftrightarrow x - 1 = -\sqrt{y} \Leftrightarrow x = 1 - \sqrt{y}$$

Οπότε $h^{-1}(y) = 1 - \sqrt{y}$, με $y \in [0,1]$

Άρα $h^{-1}(x) = 1 - \sqrt{x}$, με $x \in [0,1]$

Θέμα Β 3i

Έστω $h^{-1}(x) = 1 - \sqrt{x}, x \in [0,1]$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση: $\varphi(x) = \begin{cases} \frac{h^{-1}(x)}{1-x}, x \in [0,1) \\ \frac{1}{2}, \quad x = 1 \end{cases}$

(i) Να αποδείξετε ότι για τη συνάρτηση φ ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος ενδιάμεσων τιμών στο [0,1] .

Μονάδες 6

Εξετάζουμε την συνέχεια στο $x_0 = 1$. $\varphi(1) = \frac{1}{2}$

$$\lim_{x\to 1} \varphi(x) = \lim_{x\to 1} \frac{1-\sqrt{x}}{1-x} = \lim_{x\to 1} \frac{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}{(1-x)(1+\sqrt{x})} = \lim_{x\to 1} \frac{1-(\sqrt{x})^2}{(1-x)(1+\sqrt{x})} = \lim_{x\to 1} \frac{1-x}{(1-x)(1+\sqrt{x})} =$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{1}{1+\sqrt{x}} = \frac{1}{2}$$

- Άρα η $\varphi(x)$ συνεχής στο $x_0 = 1$
- Η $\varphi(x)$ συνεχής στο $[0,1)$ ως πράξη συνεχών

Οπότε η $\varphi(x)$ συνεχής στο $[0,1]$

$$\left.\begin{array}{l} \varphi(0) = 1 \\ \varphi(1) = \frac{1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \varphi(0) \neq \varphi(1)$$

Άρα ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Ε.Τ. στο διάστημα $[0,1]$

Θέμα Β 3ii

Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in [0,1\,]$ τέτοιο ώστε $\varphi(x_0) = \text{ημ}\alpha$, όπου $\frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

Μονάδες 4

Οπότε για κάθε αριθμό n μεταξύ των $\varphi(1) = \frac{1}{2}$ και $\varphi(0) = 1$ υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $\varphi(x_0) \; = \; n$.

Και επειδή $\frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{\pi}{2} \overset{\eta\mu x \uparrow}{\Longleftrightarrow} \eta\mu\frac{\pi}{6} < \eta\mu\alpha < \eta\mu\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} < \eta\mu\alpha < 1$ τότε ισχύει και $\varphi(x_0) = \eta\mu\alpha$

Θέμα Γ 1

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, η γραφική παράσταση της οποίας διέρχεται από την αρχή των αξόνων. Δίνεται ακόμα ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$ και για την παράγωγο f' της f ισχύει ότι:

$$f'(x)=\begin{cases}-2 , & x<-1\\ 3x^2-1 , & x>-1\end{cases}$$

Να αποδείξετε ότι

$$f(x)=\begin{cases}-2x-2 , & x\le -1\\ x^3-x , & x>-1\end{cases}$$

Μονάδες 6

$$f'(x)=\begin{cases}(-2x)' , & x<-1\\ (x^3-x)' , & x>-1\end{cases}$$

Άρα από τις συνέπειες Θ.Μ.Τ, υπάρχουν σταθερές c_1, c_2 τέτοιες ώστε:

$$f(x)=\begin{cases}-2x+c_1 , & x\le -1\\ x^3-x+c_2 , & x>-1\end{cases}$$

Η C_f διέρχεται από το σημείο $(0,0)$ άρα

$$f(0)=0 \Leftrightarrow 0^3-0+c_2=0 \Leftrightarrow \boxed{c_2=0}$$

Η f είναι συνεχής $\mathbb{R}$ άρα και στο $x_0=-1$

$$\lim_{x\to-1^-} f(x)=\lim_{x\to-1^+} f(x)=f(-1)\Leftrightarrow$$

$$2+c_1=(-1)^3-(-1)\Leftrightarrow$$

$$2+c_1=-1+1\Leftrightarrow$$

$$c_1=-2$$

Επομένως: $f(x)=\begin{cases}-2x-2 , & x\le -1\\ x^3-x , & x>-1\end{cases}$

Θέμα Γ 2

Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της γραφικής παράστασης της f σε σημείο $A(x_0, f(x_0))$, με $x_0 > -1$, η οποία τέμνει τον άξονα $y'y$ στο -2

Μονάδες 5

Η εξίσωση εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ με $x_0 > -1$ είναι:

$\varepsilon: y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ (1)

Η ε τέμνει τον άξονα $y'y$ στο -2, άρα για $x = 0$και $y = -2$ η σχέση (1) γίνεται:

$$-2 - f(x_0) = f'(x_0)(0 - x_0)$$
$$-2 - ({x_0}^3 - x_0) = (3{x_0}^2 - 1)(-x_0)$$
$$-2 - {x_0}^3 + x_0 = -3{x_0}^3 + x_0$$
$$2{x_0}^3 = 2$$
$${x_0}^3 = 1$$
$$x_0 = 1$$

Άρα το σημείο επαφής είναι το $A(1,0)$ και η εξίσωση της εφαπτομένης ευθείας είναι:

$$\varepsilon: y - f(1) = f'(1)(x - 1)$$
$$\varepsilon: y - 0 = 2(x - 1)$$
$$\boxed{\varepsilon: y = 2x - 2}$$

Θέμα Γ 3

Έστω $y = 2x - 2$ η εξίσωση της ευθείας (ε) του ερωτήματος Γ2. Ένα σημείο $M(x, y)$ με $x > 2$ κινείται κατά μήκος της ευθείας (ε). Έστω ακόμα Ε το εμβαδόν του τριγώνου ΜΚΓ, όπου Κ είναι η προβολή του σημείου Μ στον άξονα $x'x$ και Γ είναι το σημείο με συντεταγμένες (2,0). Τη χρονική στιγμή t_0 κατά την οποία το σημείο Μ διέρχεται από το σημείο $\mathrm{B}(3,4)$ ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του σημείου Μ είναι 2 μονάδες ανά δευτερόλεπτο. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του εμβαδού Ε τη χρονική στιγμή t_0.

Μονάδες 6

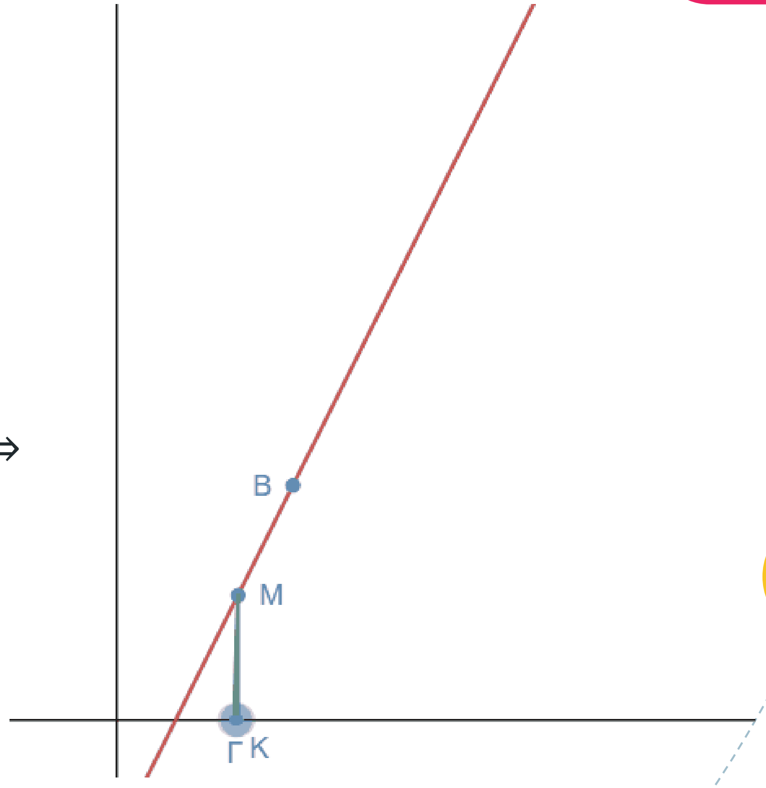
$$E(t) = \frac{1}{2}(x(t) - 2)(2x(t) - 2) \Rightarrow$$

$$E'(t) = \frac{1}{2}[x'(t) \cdot (2x(t) - 2) + (x(t) - 2) \cdot 2x'(t)] \Rightarrow$$

$$E'(t_0) = \frac{1}{2}[x'(t_0) \cdot (2x(t_0) - 2) + (x(t_0) - 2) \cdot 2x'(t_0)] \Rightarrow$$

$$E'(t_0) = \frac{1}{2}[2 \cdot (6 - 2) + (3 - 2) \cdot 2 \cdot 2] = \frac{1}{2}(8 + 4) = \frac{12}{2} \Rightarrow$$

$$E'(t_0) = 6 \ \text{τ.μ./sec}$$



Θέμα Γ 4

Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\frac{\eta\mu f(x)}{f(x)}+\frac{f(-x)}{1-x^3}\right]$

Μονάδες 8

Αφού $x\to-\infty$ το $-x\to+\infty$. Οπότε: $f(-x)=(-x)^3-(-x)=-x^3+x$

$$\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{\eta\mu f(x)}{f(x)}+\frac{f(-x)}{1-x^3}\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{\eta\mu(-2x-2)}{-2x-2}+\frac{-x^3+x}{1-x^3}\right]=0+1=1 \text{ διότι}$$

θέτοντας $-2x-2=u$ τότε $\lim\limits_{x\to-\infty}u=\lim\limits_{x\to-\infty}(-2x-2)=+\infty$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\eta\mu(-2x-2)}{-2x-2}=\lim_{u\to+\infty}\frac{\eta\mu u}{u}=0 \text{ διότι } -\frac{1}{|u|}\leq\frac{\eta\mu u}{u}\leq\frac{1}{|u|}$$

και $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-x^3+x}{1-x^3}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-x^3}{-x^3}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^3}{x^3}=1$

Θέμα Δ 1

Δίνεται η συνάρτηση $f: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με τύπο:

$$f(x) = x - \ln(3x)$$

i) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες x_1, x_2, με $x_1 < 1 < x_2$. (μονάδες 6)

ii) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι κυρτή. (μονάδες 2)

Μονάδες 8

$$f'(x) = (x - ln(3x))' = 1 - \frac{3}{3x} = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
f'	$-$	0	$+$
f	$\searrow$		$\nearrow$

$$f(1) = 1 - \ln 3 < 0 \quad διότι \quad 3 > e \Leftrightarrow \ln 3 > \ln e = 0$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} (x - ln(3x)) = \lim_{x \to +\infty} \left[x \left(1 - \frac{ln(3x)}{x} \right) \right] = (+\infty) \cdot (1 - 0) = +\infty$$

$$διότι \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{ln(3x)}{x} \right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{(ln(3x))'}{(x)'} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{3}{3x}}{1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Θέμα Δ 1

Δίνεται η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με τύπο:

$$f(x)=x-\ln(3x)$$

i) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες x_1, x_2, με $x_1<1<x_2$. (μονάδες 6)

ii) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι κυρτή. (μονάδες 2)

Μονάδες 8

- $Αν\ x\in(0,1]=A_1\ \ τότε\ f(A_1)=[1-\ln 3,\ +\infty)\ \ και\ \ f\ \downarrow επειδή$

  $0\in f(A_1)\ \ υπάρχει\ \ ένα\ \ ακριβώς\ \ \ x_1<1\ \ \ τέτοιος\ ώστε\ \ f(x_1)=0.$

- $Αν\ x\in[1,+\infty)=A_2\ \ τότε\ f(A_2)=[1-\ln 3,\ +\infty)\ \ και\ \ f\ \uparrow επειδή$

  $0\in f(A_2)\ \ υπάρχει\ \ ένα\ \ ακριβώς\ \ \ x_2>1\ \ \ τέτοιος\ ώστε\ \ f(x_2)=0$

$Άρα\ η\ εξίσωση\ \ f(x)=0\ \ έχει\ ακριβώς\ δύο\ ρίζες\ x_1,x_2\ \ με\ x_1<x_2$

ii) $f''(x)=\left(1-\frac{1}{x}\right)'=\frac{1}{x^2}>0$, για κάθε $x>0$

άρα η f κυρτή στο $(0,+\infty)$.

Θέμα Δ2

Αν Ε είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f και τον άξονα $\chi'\chi$, να αποδείξετε ότι:

$$E = \frac{1}{2}(x_2 - x_1)(x_1 + x_2 - 2)$$

Μονάδες 7

$f(\chi) \neq 0$ για κάθε $x \in (x_1, x_2)$ αφού είναι συνεχής στο (x_1, x_2). Άρα από Θ.Bolzano θα διατηρεί σταθερό πρόσημο. Επίσης ισχύει ότι $f(1) = 1 - ln\,3 < 0$. Επομένως $f(x) \leq 0$ για κάθε $x \in [x_1, x_2]$

$$E = \int_{x_1}^{x_2} |f(x)|dx = -\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx$$

$$= -\int_{x_1}^{x_2} (x)' f(x)dx$$

$$= -[x \cdot f(x)]_{x_1}^{x_2} + \int_{x_1}^{x_2} x \cdot f'(x)dx$$

$$= -x_2 \cancel{f(x_2)} + x_1 \cancel{f(x_1)} + \int_{x_1}^{x_2} x \cdot \left(1 - \frac{1}{x}\right) dx = \int_{x_1}^{x_2} (x-1)dx = \left[\frac{x^2}{2} - x\right]_{x_1}^{x_2} = \frac{x_2^2}{2} - x_2 - \frac{{x_1}^2}{2} + x_1$$

$$= -\frac{1}{2}(x_1 + x_2)(x_1 - x_2) + (x_1 - x_2) = -\frac{1}{2}(x_1 - x_2)(x_1 + x_2 - 2)$$

$$= \frac{1}{2}(x_2 - x_1)(x_1 + x_2 - 2)$$

Θέμα Δ 3

Να αποδείξετε ότι: $f(2-x_1)<0$.

Μονάδες 4

$$\left.\begin{array}{l} E=\dfrac{1}{2}(x_2-x_1)(x_1+x_2-2)>0 \\ x_2-x_1>0 \end{array}\right\} \Rightarrow x_1+x_2-2>0$$

Οπότε $2-x_1<x_2$

Εστω ότι $2-x_1>1 \Leftrightarrow 1-x_1>0 \Leftrightarrow x_1<1$ το οποίο ισχύει.

Επομένως $1<2-x_1<x_2$ και $f\uparrow$ στο $[1,+\infty]$

Συνεπώς $f(2-x_1)<f(x_2)=0$

Θέμα Δ 4

Να εξετάσετε αν η εξίσωση: $2f(x) + \ln 3 = 1 + f'(x)(x - x_2)$ έχει λύση.

Μονάδες 6

Η εξίσωση γράφεται ισοδύναμα:

$$[f(x) - f(1)] + [f(x) - f'(x_2)(x - x_2)] = 0 \qquad (1)$$

Ισχύουν $f(x) \geq f(1)$ *από α′ ερώτημα*

Βρίσκουμε την εφαπτομένη στο x_2

$$y - f(x_2) = f'(x_2)(x - x_2) \Leftrightarrow y = f'(x_2)(x - x_2)$$

Η f *κυρτή άρα* $f(x) - f'(x_2)(x - x_2) \geq 0$

Επομένως από την (1) *έχουμε*:

$$f(x) - f(1) = 0 \quad \textit{και} \quad f(x) - f'(x_2)(x - x_2) = 0$$

οι οποίες ισχύουν για $x = 1$ και $x = x_2 > 1$.

Συνεπώς η εξίσωση είναι αδύνατη.

Πανελλήνιες 2022

Καλά αποτελέσματα!

έτσι μαθαίνω